Miscelânea em Combinatória

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

Problema 1 (Cone Sul 2001/4)**.** Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Prove que há dois pontos do polígono cuja distância é pelo menos S/a.

Problema 2 (Ibero 1997/6)**.** Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, onde P_1 é o centro do círculo. Seja x_k a distância de P_k ao ponto mais próximo em $\mathcal{P}$, mas diferente dele. Mostre que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9$.

Problema 3. Seja C um círculo de raio 16 e A um anel com raio interior 2 e raio exterior 3. Suponha que um conjunto S de 650 pontos são selecionados no interior de C. Prove que podemos colocar o anel A no plano de modo que ele cubra pelo menos 10 pontos de S.

Problema 4. Dado um conjunto S de n pontos no plano, prove que existem pelo menos $\sqrt{n}$ pontos em S tais que não há três vértices de um triângulo equilátero.

Problema 5 (Romênia TST 1999)**.** Sejam $A_1, \ldots, A_m \subset [n]$ com $|A_i| = 3$ e $|A_i \cap A_j| \leq 1$ para todos $i \neq j$. Prove que existe $X \subset [n]$ tal que $|X| \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ e $X \not\supset A_i$ para todo i.

Problema 6 (Metrópoles 2020/3)**.** Seja $n > 1$ um inteiro. Um conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$ é *sortudo* se $a_1 + \cdots + a_n$ pode ser formado de maneira única com as parcelas $a_1, \ldots, a_n$. (a) Prove que existe um conjunto sortudo $\{a_1, \ldots, a_n\}$ com $a_1 + \cdots + a_n < n \cdot 2^n$. (b) Prove que todo conjunto sortudo $\{a_1, \ldots, a_n\}$ satisfaz $a_1 + \cdots + a_n > n \cdot 2^{n-1}$.

Problema 7. Cada uma de seis pessoas inicialmente sabe uma fofoca pessoal. Em uma ligação, duas pessoas compartilham todas as fofocas que sabem. Determine o número mínimo de ligações para que todas as pessoas saibam todas as fofocas.

Problema 8 (Erdős–Szekeres)**.** Os inteiros de 0 a 100 são escritos em qualquer ordem. Prove que 11 deles formam uma sequência monotonicamente crescente ou decrescente.

Problema 9 (IMO 1989/3)**.** Sejam n e k inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos no plano tal que não há três pontos de S colineares e, para cada ponto P em S, existem pelo menos k pontos de S que equidistam de P. Prove que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Problema 10 (Irã 2010)**.** Temos n pontos no plano de modo que não existam três deles colineares. Prove que o número de triângulos com vértices nestes pontos e cuja área é exatamente 1 não pode ser maior que $\frac{2}{3}\left(n^2 - n\right)$.

Referências

[1] Arthur Engel (1998). *Problem-Solving Strategies.*

[2] Bruno Holanda (2018). *Tópicos em Combinatória (Avançado).* Farias Brito.

[3] Adrian Tang (2009). *Combinatorics and Combinatorial Geometry.* Canada IMO Winter Camp 2009.