Álgebra Linear em Combinatória

Dicas e Soluções

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

Problema 1. Sejam $A_1, \ldots, A_r$ subconjuntos distintos de $[n]$ tal que $|A_i|$ é ímpar para todo i e $|A_i \cap A_j|$ é par para todos $i \neq j$. Encontre o maior valor possível de r.

Passo a passo. Para achar o maior valor possível, mostre um exemplo que funciona e mostre que é impossível para maior. (a) Defina o vetor indicador $v_i \in \mathbb{F}_2^n$. (b) Prove que $\{v_i\}$ é linearmente independente.

Problema 2 (São Petersburgo)**.** Os alunos de uma escola vão tomar sorvete em grupos de pelo menos dois. Após $k > 1$ os grupos terem saído, cada dois alunos saíram juntos exatamente uma vez. Prove que o número de alunos na escola é no máximo k.

Passo a passo. (a) Defina a matriz $k \times n$ A de incidência. (b) Mostre que $A^T A$ é invertível.

Problema 3 (Inequação de Fisher)**.** Sejam $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos distintos de $[n]$ e $k < n$ um inteiro positivo tal que $|A_i \cap A_j| = \lambda$ para todo $i \neq j$. Prove que $m \leq n$.

Passo a passo. (a) Defina a matriz $n \times r$ A de vetores-coluna indicadores. (b) Calcule $A^T A$. (c) Mostre que $A^T A$ é invertível.

Problema 4. Em uma festa com $2n$ pessoas, cada pessoa tem um número par de amigos. Prove que há duas pessoas que têm um número par de amigos em comum.

Passo a passo. Prova por contradição. (a) Defina a matriz $2n \times 2n$ A de adjacência. (b) Calcule $(AA)\mathbf{1} = A(A\mathbf{1})$ de dois jeitos.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo par e sejam $S_1, \ldots, S_n$ subconjuntos de tamanho pares de $[n]$. Prove que existem $i \neq j$ tal que $|S_i \cap S_j|$ é par.

Passo a passo. Prova por contradição. (a) Defina a matriz $n \times n$ A de vetores-coluna indicadores. (b) Mostre que $A^T x = \mathbf{0}$ possui solução não-trivial, logo A não é invertível. (c) Mostre que $A^T A$ é invertível.

Problema 6 (Belarus)**.** Considere um tabuleiro 6×6. Cada casa do tabuleiro é pintada de preto ou branco. É permitido escolher qualquer quadrado $t \times t$, $2 \leq t \leq 6$, e inverter todas as cores do quadrado. Você pode fazer isso quantas vezes quiser. É sempre possível fazer com que todo o tabuleiro fique preto?

Passo a passo. (a) Modele o problema em $\mathbb{F}_2^{36}$. (b) Mostre que a dimensão do espaço gerado é ≤ 35.

Problema 7 (Clássico)**.** Seja n um inteiro positivo. São dados $2n+1$ números reais com a propriedade de que, sempre que um deles é removido, os $2n$ restantes podem ser divididos em dois conjuntos de n elementos que possuem a mesma soma de elementos. Prove que todos os números são iguais.

Passo a passo. A primeira solução usa que $\mathbb{R}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Pode parecer é necessário usar o Axioma da Escolha, mas existe uma maneira de resolver sem ele. (a) Resolva para inteiros. (b) Resolva para racionais. (c) Resolva para reais, usando a base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$.

Passo a passo. A segunda solução usa matrizes. (a) Construa uma matriz M adequada com zeros na diagonal e entradas ± 1. (b) Mostre que o determinante dessa matriz não é 0. Use módulo 2 para facilitar. (c) Como a matriz é invertível, a solução é única.

Problema 8 (China West 2002)**.** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $[n]$. Prove que existem subconjuntos disjuntos $I, J \subset [n+1]$ tais que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Passo a passo. (a) Ache a combinação linear $\sum \lambda_i v_i = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. (b) Defina $I = \{i : \lambda_i > 0\}$ e $J = \{i : \lambda_i < 0\}$.

Problema 9 (Lindstrom)**.** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ subconjuntos não vazios de $[n]$. Prove que existem subconjuntos disjuntos não vazios $I, J \subset [n+2]$ tais que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j, \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} A_j.$$

Problema 10 (Russia 2001)**.** Uma competição com n questões foi feita por m competidores. Cada questão vale uma quantidade positiva diferente de pontos. Após as provas serem avaliadas, percebeu-se que era possível escolher as pontuações de cada questão de modo que qualquer ranking dos participantes pudesse ser atingido. Qual o maior valor possível de m ?

Passo a passo. (a) Ache a combinação linear $\sum \lambda_i v_i = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. (b) Defina $I = \{i : \lambda_i > 0\}$ e $J = \{i : \lambda_i < 0\}$. (c) Mostre que é impossível que todos de I ranqueem acima de todos de J.

Problema 11. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ subconjuntos de $[n]$ tais que, para todo conjunto não vazio T de $[n]$, existe i tal que $|A_i \cap T|$ é ímpar; e para todos i, j, A_i e B_j têm exatamente um elemento em comum. Prove que $B_1 = B_2 = \cdots = B_n$.

Passo a passo. (a) Defina a matriz $n \times n$ A de incidência sobre $\mathbb{F}_2$. (b) Mostre que A é invertível, logo $Ax = \mathbf{1}$ possui solução única.

Problema 12 (Rússia)**.** Em uma festa com n pessoas, para todo grupo de k pessoas, $1 \leq k \leq n$, existe pelo menos uma pessoa, dentro ou fora do grupo, que tem uma quantidade ímpar de amigos no grupo. Prove que n é par.

Passo a passo. Prova por absurdo. (a) Defina a matriz $n \times n$ A de adjacência sobre $\mathbb{F}_2$. (b) Defina $B \equiv A \pmod 2$ sobre $\mathbb{R}$ antissimétrica, e prove que $\det B = 0$, logo $\det A \equiv 0 \pmod 2$. (c) Logo, existe solução não-trivial $Ax = \mathbf{0}$. Conclua.

Problema 13 (IMC 2019/8)**.** Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números reais. Para qualquer conjunto $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, seja $s(I) = \sum_{i \in I} x_i$. Suponha que a função $I \mapsto s(I)$ assume pelo menos $(1.8)^n$ valores onde I percorre todos os 2^n subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que o número de conjuntos $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ para os quais $s(I) = 2019$ não excede $(1.7)^n$.

Passo a passo. Prova por contradição. (a) Construa 1.8^n e 1.7^n conjuntos/vetores com as propriedades dadas. (b) Construa $1.8^n \cdot 1.7^n > 3^n$ vetores a partir de pares acima. (c) Use o princípio da casa dos pombos.

Problema 14 (Alemanha TST 2004)**.** Seja G um grafo simples finito. Existe uma lâmpada em cada vértice e, inicialmente, todas estão apagadas. Em cada passo, podemos escolher um vértices e mudar o estado das lâmpadas dele e de seus vizinhos. Prove que é possível deixar todas as lâmpadas acesas simultaniamente.

Passo a passo. (a) Defina a matriz de adjacência A, com entradas em $\mathbb{F}_2$ e 1 na diagonal. (b) Prove que, como A é simétrica, $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A)^\perp$. (c) Prove que $\mathbf{1} \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Portanto, $\mathbf{1} \in \operatorname{Im} A$.

Problema 15 (USAMO 2008)**.** Numa convenção matemática, alguns pares de matemáticos são amigos. No jantar, cada participante senta em alguma das duas salas. Cada matemático insiste em ter uma quantidade par de amigos na mesma sala. Prove que o número de maneiras de separar os matemáticos nas duas salas é uma potência de 2.

Passo a passo. (a) Defina a matriz de adjacência A, com entradas em $\mathbb{F}_2$ e 1 na diagonal. Defina d o vetor de graus dos vértices. (b) Note que o vetor $v \in \mathbb{F}_2^n$ é solução se, e só se, $(A + \operatorname{diag} d)v = d$. Seja $B = A + \operatorname{diag} d$. (c) Mostre que $d \in \operatorname{Im} B = (\operatorname{Ker} B)^{\perp}$. (d) O número de soluções será não nulo e, portanto, uma potência de 2, por conta do corpo correspondente $\mathbb{F}_2$.

Problema 16 (Moldávia TST 2005)**.** Existem 22 círculos e 22 pontos no plano tais que cada círculo contém pelo menos 7 pontos e cada ponto pertence a pelo menos 7 círculos?

Solução (Shine). Primeiro vamos contar a quantidade N de interseções de dois círculos em pontos no conjunto. Temos $2 \cdot \binom{22}{2} \geq N \geq 22 \cdot \binom{7}{2}$ (no lado esquerdo, cada par de círculos se corta em no máximo dois pontos; no lado direito, para cada ponto contamos os pares de círculos a que ele pertence.) Mas $2 \cdot \binom{22}{2} = 22 \cdot 21 = 22 \cdot \binom{7}{2}$, logo ocorre a igualdade: cada ponto está em exatamente 7 círculos e cada par de círculos se corta em pontos do conjunto.

Agora, considere a matriz A, quadrada de ordem 22 , em que a entrada a_{ij} é zero se o ponto i não está no círculo j e um se está. Logo $A^2 = 5J + 2I$, em que J é a matriz só com uns e I é a identidade. Isso quer dizer que o determinante de $5J + 2I$ é quadrado perfeito. Mas

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 7 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 7 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -5 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ -5 & 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -5 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 + 21 \cdot 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} = 5^{21} \cdot 49$$

que não é quadrado perfeito, absurdo.

Problema 17 (Irã 2006, Capacidade de Sperner do Triângulo Cíclico)**.** Seja A uma coleção de vetores de tamanho n de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ com a propriedade de que para quaisquer dois vetores distintos $a, b \in A$, existe alguma coordenada i tal que $b_i \equiv a_i + 1 (\text{mod} 3)$. Prove que $|A| \leq 2^n$

Solução (Zanarella). Para um elemento $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, considere o mapa linear $f_a : \mathbb{F}_3^n \to \mathbb{F}_3$ dado por

$$f_a(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + 1 - x_i)$$

Note que temos $f_a(a) = 1$ e $f_a(b) = 0$ para quaisquer elementos $a \neq b$ de A. Assim como no primeiro problema, isso significa que os mapas lineares $\{f_a : a \in A\}$ são linearmente independentes. Mas todos eles são combinações lineares de monômios $\prod_{i \in S} x_i$ para $S \subseteq [n]$. Como temos 2^n tais monômios, temos que ter que $|A| \leq 2^n$.

Problema 18 (Rússia 1998)**.** Cada quadrado de um tabuleiro $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ contém $+1$ ou -1. Tal arranjo é chamado de *bem-sucedido* se cada número for o produto de seus vizinhos (quadrados que compartilham um lado comum com o quadrado dado). Encontre o número de arranjos bem-sucedidos.

Passo a passo. A resposta é 1. (a) Reescreva o problema em $\mathbb{F}_2$. (b) A condição se transforma em um sistema de equações, i.e., $Ax = \mathbf{0}$. (c) Expanda a definição de determinante em permutações: $\det A \pmod 2$ é o número de permutações σ do conjunto de quadrados que respeitam as arestas (ou seja, $\{a, \sigma(a)\}$ é sempre uma aresta). (d) Pareie permutações sem simetrias horizontais e verticais com suas reflexões. (e) Use a indução para provar que o número de permutações com simetria horizontal e vertical é ímpar.

Problema 19 (Graham–Pollak)**.** Mostre que o grafo completo com n vértices, K_n, não pode ser coberto por menos de $n - 1$ grafos bipartidos completos de modo que cada aresta de K_n é coberto exatamente uma vez.

Passo a passo. Prova por absurdo. Sejam (A_k, B_k) os conjuntos que definem os grafos bipartidos. (a) Para cada vértice i, associe uma variável x_i. (b) Traduza a condição para uma igualdade polinômial de grau 2 nessas n variáveis. (c) Existe solução $c_1, \ldots, c_n$ não-trivial para o sistema $\sum x_i = 0$ e $\sum_{i \in A_k} x_i = 0$. (d) Mostre por contradição que $0 = (c_1 + \cdots + c_n)^2 > 0$.

Referências

[1] Po-Shen Loh (2011). *Algebraic Methods in Combinatorics.* MOP 2011.

[2] Carlos Shine (2012). *Aplicações de Álgebra Linear em Combinatória.* POT 2012, Combinatória, Nível 3, Aula 21.

[3] Murilo Corato Zanarella (2019). *Métodos Algébricos em Combinatória.* Treinamento IMO 2019.

[4] Yufei Zhao (2007). *Algebraic Techniques in Combinatorics.* MOP 2007 Black Group.

[5] Günter M. Ziegler and Karl H. Hofmann (2006). *Proofs from the Book.* Springer.