Álgebra Linear em Combinatória

Versão Extendida

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

Problema 1. Sejam $A_1, \ldots, A_r$ subconjuntos distintos de $[n]$ tal que $|A_i|$ é ímpar para todo i e $|A_i \cap A_j|$ é par para todos $i \neq j$. Encontre o maior valor possível de r.

Problema 2 (São Petersburgo)**.** Os alunos de uma escola vão tomar sorvete em grupos de pelo menos dois. Após $k > 1$ os grupos terem saído, cada dois alunos saíram juntos exatamente uma vez. Prove que o número de alunos na escola é no máximo k.

Problema 3 (Inequação de Fisher)**.** Sejam $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos distintos de $[n]$ e $k < n$ um inteiro positivo tal que $|A_i \cap A_j| = \lambda$ para todo $i \neq j$. Prove que $m \leq n$.

Problema 4. Em uma festa com $2n$ pessoas, cada pessoa tem um número par de amigos. Prove que há duas pessoas que têm um número par de amigos em comum.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo par e sejam $S_1, \ldots, S_n$ subconjuntos de tamanho pares de $[n]$. Prove que existem $i \neq j$ tal que $|S_i \cap S_j|$ é par.

Problema 6 (Clássico)**.** Seja n um inteiro positivo. São dados $2n+1$ números reais com a propriedade de que, sempre que um deles é removido, os $2n$ restantes podem ser divididos em dois conjuntos de n elementos que possuem a mesma soma de elementos. Prove que todos os números são iguais.

Problema 7 (Belarus)**.** Considere um tabuleiro 6×6. Cada casa do tabuleiro é pintada de preto ou branco. É permitido escolher qualquer quadrado $t \times t$, $2 \leq t \leq 6$, e inverter todas as cores do quadrado. Você pode fazer isso quantas vezes quiser. É sempre possível fazer com que todo o tabuleiro fique preto?

Problema 8 (China West 2002)**.** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $[n]$. Prove que existem subconjuntos disjuntos $I, J \subset [n+1]$ tais que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Problema 9 (Lindstrom)**.** Sejam A_1, A_2, ..., A_{n+2} subconjuntos não vazios de $[n]$. Prove que existem subconjuntos disjuntos não vazios $I, J \subset [n+2]$ tais que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j \quad \text{e} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J} A_j.$$

Problema 10 (Russia 2001)**.** Uma competição com n questões foi feita por m competidores. Cada questão vale uma quantidade positiva diferente de pontos. Após as provas serem avaliadas, percebeu-se que era possível escolher as pontuações de cada questão de modo que qualquer ranking dos participantes pudesse ser atingido. Qual o maior valor possível de m?

Problema 11. Sejam A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n subconjuntos de $[n]$ tais que, para todo conjunto não vazio T de $[n]$, existe i tal que $|A_i \cap T|$ é ímpar; e para todos i, j, A_i e B_j têm exatamente um elemento em comum. Prove que $B_1 = B_2 = \cdots = B_n$.

Problema 12 (Rússia)**.** Em uma festa com n pessoas, para todo grupo de k pessoas, $1 \leq k \leq n$, existe pelo menos uma pessoa, dentro ou fora do grupo, que tem uma quantidade ímpar de amigos no grupo. Prove que n é par.

Problema 13 (IMC 2019/8)**.** Sejam x_1, ..., x_n números reais. Para qualquer conjunto $I \subset [n]$, seja $s(I) = \sum_{i\in I} x_i$. Suponha que a função $I \mapsto s(I)$ assume pelo menos $(1.8)^n$ valores onde I percorre todos os 2^n subconjuntos de $[n]$. Prove que o número de conjuntos $I \subset [1]$ para os quais $s(I) = 2019$ não excede $(1.7)^n$.

Problema 14 (Alemanha TST 2004)**.** Seja G um grafo simples finito. Existe uma lâmpada em cada vértice e, inicialmente, todas estão apagadas. Em cada passo, podemos escolher um vértices e mudar o estado das lâmpadas dele e de seus vizinhos. Prove que é possível deixar todas as lâmpadas acesas simultaniamente.

Problema 15 (USAMO 2008)**.** Numa convenção matemática, alguns pares de matemáticos são amigos. No jantar, cada participante senta em alguma das duas salas. Cada matemático insiste em ter uma quantidade par de amigos na mesma sala. Prove que o número de maneiras de separar os matemáticos nas duas salas é uma potência de 2.

Problema 16 (Moldávia TST 2005)**.** Existem 22 círculos e 22 pontos no plano tais que cada círculo contém pelo menos 7 pontos e cada ponto pertence a pelo menos 7 círculos?

Problema 17 (Irã 2006, Capacidade de Sperner do Triângulo Cíclico)**.** Seja A uma coleção de vetores de tamanho n de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ com a propriedade de que para quaisquer dois vetores distintos $a, b \in A$, existe alguma coordenada i tal que $b_i \equiv a_i + 1 (\text{mod} 3)$. Prove que $|A| \leq 2^n$

Problema 18 (Rússia 1998)**.** Cada quadrado de um tabuleiro $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ contém $+1$ ou -1. Tal arranjo é chamado de *bem-sucedido* se cada número for o produto de seus vizinhos (quadrados que compartilham um lado comum com o quadrado dado). Encontre o número de arranjos bem-sucedidos.

Problema 19 (Graham–Pollak)**.** Mostre que o grafo completo com n vértices, K_n, não pode ser coberto por menos de $n-1$ grafos bipartidos completos de modo que cada aresta de K_n é coberto exatamente uma vez.

Referências

[1] Po-Shen Loh (2011). *Algebraic Methods in Combinatorics.* MOP 2011.

[2] Carlos Shine (2012). *Aplicações de Álgebra Linear em Combinatória.* POT 2012, Combinatória, Nível 3, Aula 21.

[3] Murilo Corato Zanarella (2019). *Métodos Algébricos em Combinatória.* Treinamento IMO 2019.

[4] Yufei Zhao (2007). *Algebraic Techniques in Combinatorics.* MOP 2007 Black Group.

[5] Günter M. Ziegler and Karl H. Hofmann (2006). *Proofs from the Book.* Springer.